ALDO G.S. VENTRE

MATEMATICA UNO

MATERIALE INTEGRATIVO

FRIDERICIANA EDITRICE UNIVERSITARIA

Aldo G.S. Ventre

Matematica uno

Materiali integrativi

FEU

Fridericiana Editrice Universitaria
http://www.fridericiana.it/

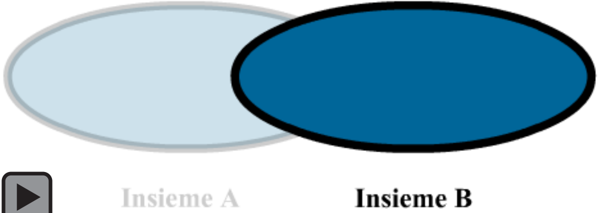
Prima edizione italiana Gennaio 2012

Questa pubblicazione non può essere commercializzata separatamente ma solo in abbinamento al testo contrassegnato dal codice **ISBN 978-88-8338-107-2**

Aggiornamenti:

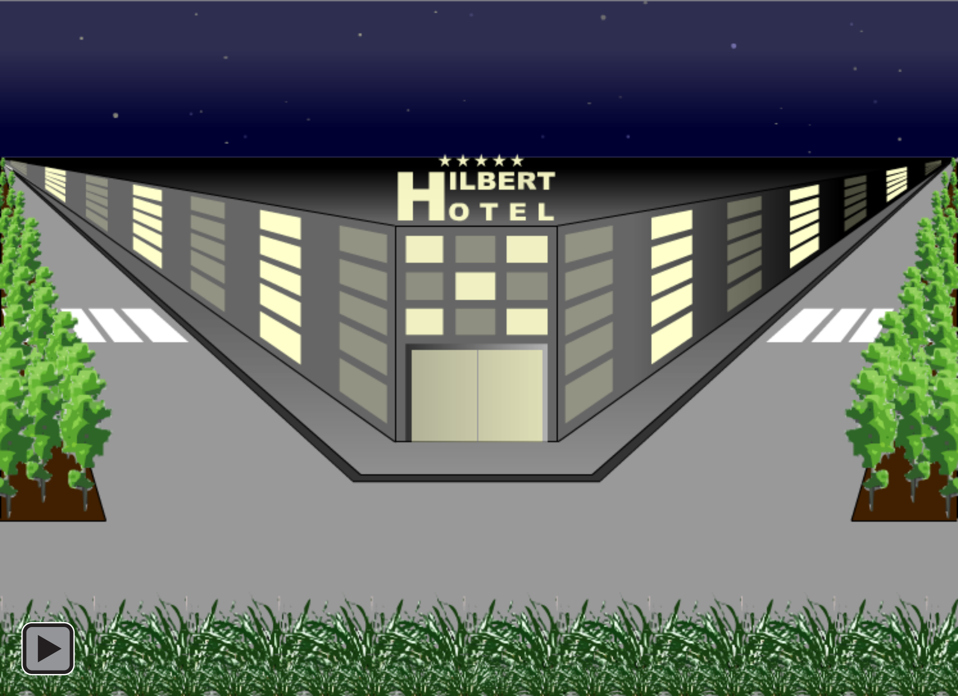
18 17 16 15 14 13 12 10 9 8 7 6 5 4 3 2 1 0

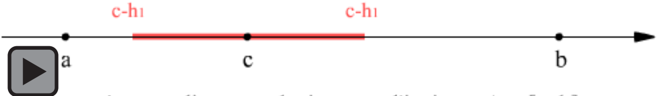
Insieme B


Insieme A
Insieme B

Insieme B

RIPRODUCI L'ANIMAZIONE


★★★★★
HILBERT
HOTEL



c e' punto di accumulazione per l'insieme A = [a, b]

LEGGE DELLA POTENZA E FRATTALI

1. Modelli

I modelli, che non solo hanno lo scopo di stabilire corrispondenze, ma guidare al chiarimento delle motivazioni, "rendere sempre più precise le domande" [1].

E’ possibile conquistare la compiuta conoscenza di un fenomeno, di una classe di fenomeni? Il modello esprime la ragionevole, una ragionevole, conoscenza di una classe di fenomeni. “ Gli obiettivi del pensiero scientifico puntano a scoprire il generale nel particolare” [2].

La misura in cui gli obiettivi sono raggiunti è indicativa del potere di una rappresentazione. Questo potere è l’essenza stessa dell’oggetto della scienza. Per usare la parole di John von Neumann: “le scienze non cercano di spiegare, non cercano nemmeno di interpretare: si limitano a costruire modelli” [3].

La parola “rappresentazione” in matematica è usata in luogo di “funzione”, “mappa”, “trasformazione. Da una rappresentazione ci si aspetta un riconoscimento immediato, o intuitivo, o visivo dell’oggetto di cui è nota la rappresentazione. Si parla, infatti, di metodi di rappresentazione in geometria, pensando alla geometria descrittiva, o di rappresentazione topologica delle superfici: ad esempio, il cilindro è rappresentato da un rettangolo con una coppia di lati opposti identificati. In generale, di una rappresentazione ci si aspetta di conoscere l’origine, la causa. Come avviene il riconoscimento? Che cosa non varia che, a rappresentazione avvenuta, ci fa scoprire l’oggetto dal modello? O conosciamo solo modelli?

All’inizio del ventesimo secolo, diversi filosofi si convinsero che la teoria della relatività di Einstein dimostrava come, in qualsivoglia settore, la verità dipendesse dall’ottica scelta. Paradossalmente, Einstein riteneva che la sua teoria enunciasse proprio il contrario: essa si basa infatti sull’idea di invarianza, cioè su una concezione profonda della realtà che resta sostanzialmente la stessa al variare delle prospettive. E’ un’interpretazione, un modello, dell’andamento dei fenomeni che si conserva vera su molte scale.

2. Campane e potenze

Supponiamo di sottoporre a un test sulle votazioni riportate da mille studenti o di pesare i maschi adulti di un paesino. Scopriremo che i voti riportati al test e i pesi degli abitanti descrivono una curva a campana (fig. 1).

figura 1

La media sarà rappresentata dal picco della curva in un intorno ristretto verrà a trovarsi la maggior parte delle cifre. La curva poi scenderà bruscamente ai due lati dell'asse poiché i voti altissimi o bassissimi e i pesi supermassimi o ultraleggeri sono rari. Scopriremo, per esempio, che il peso medio degli adulti maschi è 70 chili e che quasi tutti gli uomini del villaggio hanno un peso compreso tra 50 e 90 chili. In altre parole, se i valori che stiamo analizzando seguono una curva a campana, non troveremo mai un valore che si discosta molto dalla media: la media ci dice con sicurezza cosa dobbiamo aspettarci. Vi saranno persone che pesano 120 chili, ma sarebbe incredibile che qualcuno pesasse 500 o 2000 chili.

La curva a campana fornisce la rappresentazione di un gran numero di fenomeni, dai quozienti di intelligenza, al gioco dei dadi, alle dimensioni delle uova delle galline.

Beno Gutenberg e Charles Richter [4] sismologi del CalTech condussero analisi statistiche sulla frequenza dei terremoti analizzando una quantità di documenti relativi a sismi verificatisi in un ampio periodo e dovunque. Gutenberg e Richter stabilirono un rapporto tra dimensione e frequenza dei terremoti. Nel grafico rappresentativo sono riportati sull'ordinata il numero di terremoti e sull'ascissa la magnitudo. (Ricordiamo che quando la magnitudo aumenta di 1, l'energia liberata aumenta di 10.) In termini di intensità la legge di Gutenberg e Richter enuncia una semplice regola: se il sisma di tipo A libera due volte l'energia del sisma di tipo B, allora il sisma A è quattro volte meno frequente di B. Se l'energia raddoppia, il terremoto diventa quattro volte più raro. Il grafico di questa relazione è quello della potenza e la legge è detta "legge della potenza" (fig. 2); nel caso specifico si tratta di una potenza con esponente negativo, del tipo $y = x^{-1}$, il cui grafico è l'iperbole equilatera che ha gli asintoti negli assi coordinati.

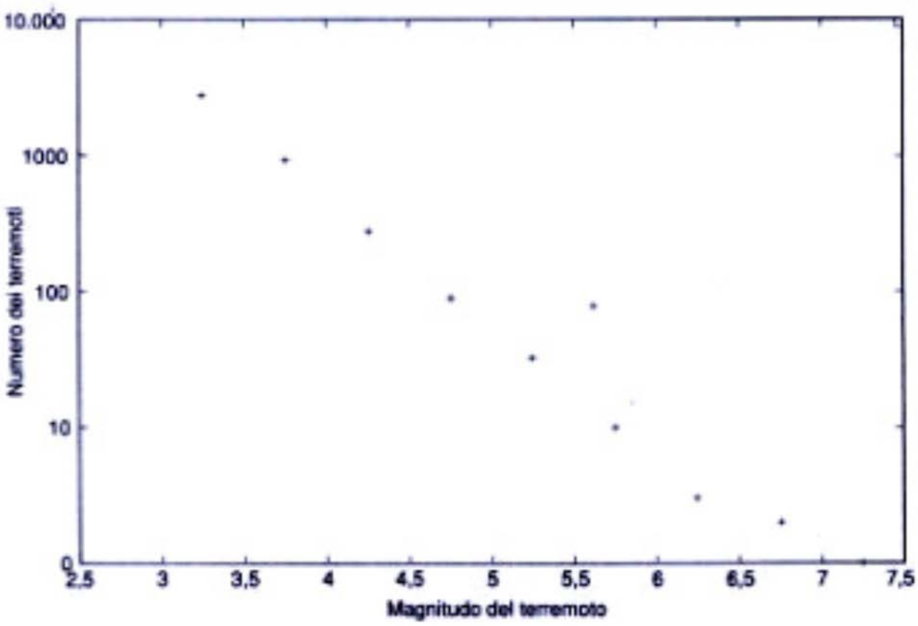
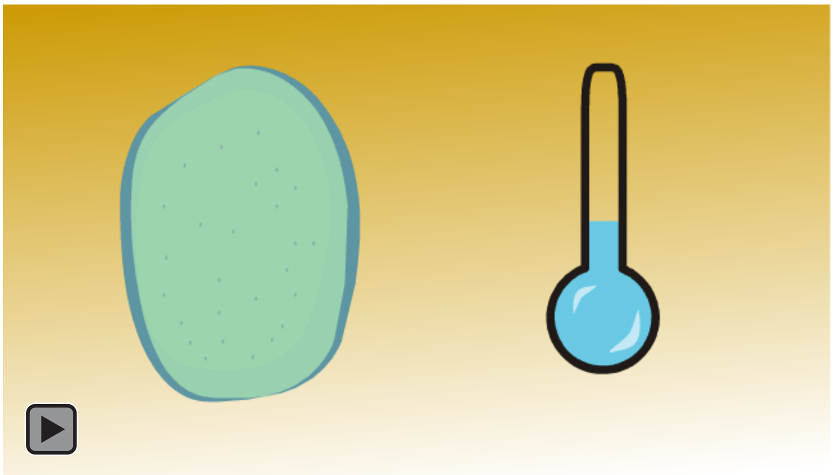


figura 2
Rapporto tra dimensione e frequenza dei terremoti (da M. Buchanan [5])

3. Patate e frattali

Lanciamo una patata sbucciata e congelata contro un muro: la patata si ridurrà a un mucchietto di frammenti di varie dimensioni. Qual è la dimensione tipica? Per scoprirlo possiamo lanciare contro il muro un migliaio di patate, produrre un gran numero di frammenti e applicare il metodo di Gutenberg e Richter. Allora suddividiamo i frammenti in dieci mucchi secondo il peso: il primo contiene i pezzi più grossi circa dello stesso peso, e così via, l'ultimo mucchio conterrà frammenti di un grammo circa. Tracciamo ora un grafico riportando sull'ordinata il numero di frammenti di ciascun mucchio e sull'ascissa il loro peso. I pezzi di patata sono descritti da una legge della potenza: precisamente se il peso dei frammenti raddoppia, allora il loro numero diminuisce di circa sei volte. In questo esperimento la frequenza è inversamente proporzionale alla dimensione di un fattore 6, anziché 4, come nella legge di Gutenberg e Richter.

L'esperimento della patata, e la scoperta che ne seguì, sono dovuti ai ricercatori danesi L. Oddershede, P. Dimon e J. Bohr [7], che utilizzarono frammenti che pesavano tra i 100 grammi e un millesimo di grammo. Il processo di frammentazione della patata può essere complesso, ma il mucchio di frammenti presenta una proprietà specifica: l'invarianza di scala o autosimilarità. Il mucchio di frammenti ha una struttura *frattale*. Il paesaggio di detriti appare lo stesso su tutte le scale, come se ciascuna parte fosse una minuscola immagine dell'insieme. Non vi è una scala "privilegiata" rispetto alle altre. (Si veda l'animazione nel file swf *patata surgelata* che segue. Utilizzando il tasto destro del mouse è possibile accedere ai controlli dell'animazione.)



E questa è una proprietà specifica. Come un frammento di cavolo, simile al cavolo, anche questa struttura frattale. Dunque la legge della potenza ci dice che non esiste un frammento normale o tipico.

I fisici Tom Witten e Leonard Saunders dell'Università di Chicago nel 1984 costruirono un modello di aggregazione [5] , di cui presentiamo una descrizione molto semplificata. Al centro di un spazio vuoto compare una singola particella. Da lontano si avvicina un'altra particella che segue una traiettoria casuale. Se non sfiora la prima continua a viaggiare, se invece la tocca le si aggrega. Entra in gioco una terza particella che segue pure una traiettoria casuale. Anch'essa, se colpisce la prima, o una delle prime due, si aggrega, altrimenti procede oltre. Il modello consiste dunque nel liberare particelle a caso, e seguire la storia del grappolo che va formandosi con quelle particelle che si aggregano. La forma dell'aggregato che si costituisce è fantastica (fig. 3).

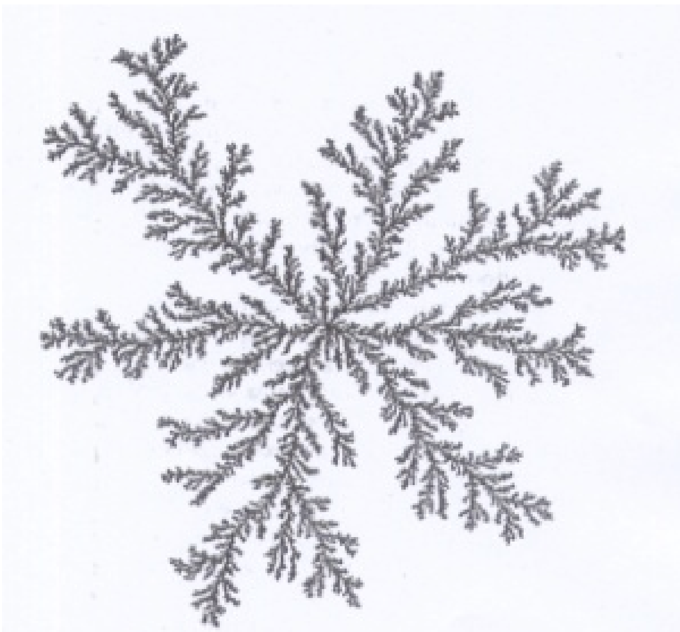


figura 3. Aggregazione di Witten e Saunders (da M. Buchanan [5])

Dal momento in cui una particella si aggrega al grappolo, il corso della storia del grappolo stesso prende una via definitiva e irreversibile di cui è traccia in tutto quanto accade in seguito. La crescita è instabile e dipende da ogni minimo evento. Tuttavia la struttura complessa che si forma ha caratteristiche costanti. Per esempio, il numero di particelle che si trovano a distanza dal centro segue la legge della potenza: al raddoppiare della distanza il numero di particelle aumenta di 3,25.

La legge della potenza ancora comporta che il grappolo è frattale e che non c'è una dimensione tipica per le varia parti o sottograppoli: se si prende una porzione dell'immagine e la si ingrandisce si noterà che è molto simile a quella intera.

4. ***Conclusione***

Lo studio di fenomeni e avvenimenti complessi prende forma nei modelli che ne danno una rappresentazione "adeguata". Il senso dell'adeguatezza risiede nelle potenzialità di offrire risposte, ma anche di formulare domande, il significato del progresso. La legge della potenza dà risposte sulla struttura del fenomeno complesso, anche sulla natura, ma non può dare informazioni sulla sua occorrenza. Mentre il poter costruire modelli probabilistici può soddisfare la richiesta di conoscenza sull'occorrenza di eventi. Vanno dunque sottolineate le peculiarità delle rappresentazione frattale e della rappresentazione probabilistica nell'indagine su fenomeni e avvenimenti, in vista della previsione. Concludiamo con Richard Evans [8],

è sempre un errore per lo storico cercare di prevedere il futuro. Diversamente dalla scienza, la vita è troppo imprevedibile.

Bibliografia

1. KARLIN S., 11th *R.A. Fisher Memorial Lecture*, in "Royal Society", April 20,1983.

2. WHITEHEAD A.N., *A Dictionary of Scientific Quotations* (MACKAY A., a cura di), IOP Publishing, Bristol 1991.

3. VON NEUMANN J., C*ollected Works* VI, Pergamon Press, 1961, p. 492.

4. RICHTER C., *Acceptance of the Medal of the Seismological Society of America*, in "Bulletin of the Seismological Society of America", 67, 1977, pp.1244-47.

5. BUCHANAN M., *Ubiquity. The Science of History. or Why the World is Simpler than we Think*, Mark Buchanan © 2000, trad. ital. *Ubiquità*, Arnoldo Mondadori Editore SpA, Milano 2001.

6. MANDELBROT B., *The Fractal Geometry of Nature*, Freeman, 1983.

7. ODDERSHEDE L., DIMON P., BOHR, *Self-organized criticality in fragmenting*, in "Physical Rewiew Letters", 71, 1993, , pp.3007-10.

8. EVANS R., *In Defense of History*, Granta Books, 1997.

13.12.4. Posizioni reciproche di due rette del piano

<u>*Equazioni parametriche*</u>

Abbiamo visto (**4.3**) che se due rette sono complanari, allora si verifica una delle circostanze seguenti:

a) le rette hanno esattamente un punto in comune;
b) le rette sono coincidenti;
c) le rette non hanno alcun punto in comune.

Se si verifica uno dei casi b) o c), allora le rette sono dette tra loro *parallele* e, in particolare, nel caso c), si dicono *propriamente parallele*. Nel caso a) le due rette sono dette *incidenti* nel punto comune.

Richiamiamo la rappresentazione della generica retta del piano mediante equazioni parametriche allo scopo di enunciare le *condizioni di parallelismo* tra rette in termini di numeri direttori (***7.2.8***). Le equazioni parametriche della retta r passante per i punti (distinti) $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ sono

$$x = x_1 + t(x_2 - x_1)$$
$$y = y_1 + t(y_2 - y_1)$$

e, posto $m = x_2 - x_1$ ed $n = y_2 - y_1$, assumono la forma

$$x = x_1 + mt$$
$$y = y_1 + nt$$

con t parametro reale (il che significa, com'è noto, che, per ogni valore di t, viene a determinarsi, ai primi membri delle due precedenti equazioni, una coppia di numeri (x, y) che sono le coordinate di uno e un solo punto della retta passante per P_1 e P_2). I numeri $m = x_2 - x_1$ ed $n = y_2 - y_1$ sono i numeri direttori della retta r, cioè le componenti (**9. 5**) del vettore P_1P_2.

Le equazioni parametriche della retta pongono in evidenza i numeri direttori, m ed n, della retta.

Sia ora s una retta di numeri direttori m', n'. Per il teorema di Talete (***7.2.8***), si ha:

Proprietà 1. Le rette r ed s sono parallele se e solo se le coppie (m, n) ed (m', n') dei rispettivi numeri direttori sono in proporzione, $m : n = m' : n'$, o, in forma generale:

$$m' = hm, n' = hn$$

con h fattore di proporzionalità non nullo (vedi anche (**9. 7**)).

In particolare, si ha:

Proprietà 2. Se (m, n) sono numeri direttori della retta r, tutte e sole le coppie $h(m, n) = (hm, hn)$, qualunque, sia il numero reale $h \neq 0$, sono coppie di numeri direttori di r.

Esempio 1.1. La retta r avente equazioni parametriche

$$x = 4 + 2t$$
$$y = -1 + 3t$$

e la retta s avente equazioni parametriche

$$x = 1 + 6t$$
$$y = 6 + 9t$$

sono parallele perché hanno i numeri direttori proporzionali, infatti 6:2=9:3.

Esempio 1.2. Le rette u, v, di equazioni parametriche

$$(u) \quad x = 4 + 5t, \ \ y = -1 - 2t$$
$$(v) \quad x = 1 + 5t, \ \ y = -2t$$
sono parallele perché hanno i numeri direttori (5, –2) uguali. La retta u passa per il punto (4, –1), la retta v passa per il punto (1, 0). Le rette u e v non coincidono perché il punto (4, –1), che appartiene a u non appartiene a v; infatti, se vogliamo verificare il passaggio di v per il punto (4, –1) di u, dobbiamo porre 4 e –1 ai primi membri delle equazioni (v):
$$4 = 1 + 5t, \quad -1 = -2t\ ;$$
osserviamo che le due equazioni in t formano un sistema incompatibile perché non esiste alcun valore di t che sia soluzione delle due equazioni (nella seconda equazione si ha $t = \dfrac{1}{2}$, e questo valore di t valore non soddisfa la prima equazione).

Equazioni ordinarie

La generica retta r del piano può essere rappresentata dall'equazione ordinaria (*7. 2. 7*)
$$(r) \qquad ax + by + c = 0$$
Esempio 2. L'equazione
$$(r) \qquad 2x - y + 1 = 0$$
rappresenta una retta. Della retta s vogliamo dare una rappresentazione parametrica, ossia vogliamo scrivere le equazioni parametriche di r. Allo scopo troviamo due punti della retta: posto $y = 1$, abbiamo $x = 0$; posto $x = -1$, abbiamo $y = -1$. Dunque la retta r passa per i punti A(0, 1), B(–1, –1). Siamo in grado di scrivere le equazioni parametriche di r:
$$x = 0 + t(-1-0)$$
$$y = 1 + t(-1\ -1),$$
togliendo il superfluo, le equazioni parametriche di r sono:
$$x = -t$$
$$y = 1 - 2t$$
i cui numeri direttori sono –1 , –2.

In generale si ha:

Proprietà 3. La coppia dei numeri direttori della retta r di equazione $ax + by + c = 0$ è $(-b, a)$.

Inoltre, per la Proprietà 2, tutte e sole le coppie $(-hb, ha)$, con $h \neq 0$ sono coppie di numeri direttori di r.

Se $b \neq 0$, l'equazione ordinaria della retta
$$(r) \qquad ax + by + c = 0$$
si può porre nella forma $y = \dfrac{-a}{b}x - \dfrac{c}{b}$ ossia, posto $k = -\dfrac{a}{b}$, $n = -\dfrac{c}{b}$, nella forma
$$(r) \qquad y = kx + p,$$
detta *equazione esplicita* di r. Il numero k, coefficiente di x, è noto come *coefficiente angolare* o *pendenza* della retta r (*7. 2. 3*). Si ha:

Proprietà 4. Il coefficiente angolare k della retta r è uguale al rapporto tra il secondo numero direttore di r e il primo.

Riassumendo, si ha la:

Proprietà 5. Se la retta ha l'equazione ordinaria

$$(r) \qquad ax + by + c = 0,$$

allora il coefficiente angolare di r è $k = -\dfrac{a}{b}$; se la retta r ha le equazioni parametriche

$$x = x_1 + tm$$
$$y = y_1 + tn$$

allora il coefficiente angolare di r è $k = \dfrac{n}{m}$.

Proprietà 6. Tutte e sole le rette parallele alla retta

$$(r) \qquad y = kx + p,$$

hanno coefficiente angolare k. Ad esempio, le rette r ed s di equazioni

$$(r) \qquad y = 2x + 3$$
$$(s) \qquad y = 2x - 1,$$

sono tra loro parallele. La prima ha ordinata all'origine +3, la seconda –1.

Esercizio 1. La retta avente equazioni parametriche

$$x = 4 + 2t$$
$$y = -1 + 3t$$

ha coefficiente angolare $k = \dfrac{3}{2}$. La retta avente equazione ordinaria

$$2x - y + 3 = 0$$

ha coefficiente angolare $k = \dfrac{1}{2}$.

Esercizio 2. Studiare l'intersezione delle rette:

$$(r) \qquad 2x - y + 3 = 0$$
$$(t) \qquad y = -3x + 8$$

Soluzione. Le rette r e t non sono tra loro parallele perché i loro numeri direttori, (1, 2), (1, 3), non sono in proporzione; quindi sono incidenti nel punto comune P(x, y): troviamo le coordinate di P, risolvendo il sistema delle due equazioni. Il valore dell'ordinata di P è $y = 2x + 3 = -3x + 8$, perciò: $2x + 3 = -3x + 8$, $5x = 5$ e $x = 1$; posto $x = 1$ nell'equazione (r) (o (t)), troviamo $y = 5$, e, quindi, P ha le coordinate (1, 5).

Esercizio 3. Dati i punti A(–1, 2) e B(–2, 1), determinare i numeri direttori della retta AB.

Soluzione. Dobbiamo determinare le differenze $(x_2 - x_1)$, $(y_2 - y_1)$ tra le ascisse di due punti distinti della retta e tra le loro ordinate. Abbiamo due punti siffatti: A(–1, 2) e B(–2, 1). Le differenze

$$x_2 - x_1 = -2 - (-1) = -1, \quad y_2 - y_1 = 1 - 2 = -1$$

forniscono i numeri direttori della retta AB: $m = -1$, $n = -1$.

Esercizio 4. Dati i punti A(–1, 2) e B(–2, 1), scrivere le equazioni parametriche della retta AB e l'equazione di AB nella forma esplicita.

Soluzione. Dall'esercizio 2 abbiamo i numeri direttori della retta AB, e quindi le equazioni parametriche della retta sono

$$x = -1 - t$$
$$y = 2 - t,$$

Applicando la sostituzione $t = -x - 1$ nella seconda l'equazione, abbiamo:

$$y = 2 \ - (-x - 1)$$

da cui la richiesta equazione esplicita: $y = x + 3$.

13.12.5. Rette perpendicolari

In (***13. 12. 3***) abbiamo precisato che il coefficiente angolare della retta

$$(r) \qquad y = kx + p$$

è il valore tgγ della tangente dell'angolo $\gamma = x\hat{\ }r$, formato dall'asse x e dalla retta r. Dunque: $k = \mathrm{tg}\gamma$.

Consideriamo ora il caso che due rette r ed s siano *perpendicolari* tra loro.

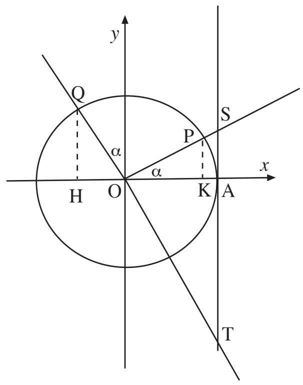


Figura 25
relazione tra i coefficienti angolari di due rette tra loro perpendicolari:
r , passante per O e P, ed s, passante per O e Q

La retta r, passante per O e P, e la retta s, passante per O e Q, sono tra loro perpendicolari (Fig. 25). Siano k e k' i loro coefficienti angolari, rispettivamente, ossia:

$$k = \mathrm{tg}\alpha, \qquad k' = \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right),$$

L'ampiezza dell'angolo POQ vale $\frac{\pi}{2}$ e quindi quella dell'angolo AOQ vale $\frac{\pi}{2} + \alpha$, inoltre l'ascissa del punto A è 1, la misura del segmento orientato AS è la tangente dell'angolo α, e la misura del segmento orientato AT è la tangente dell'angolo $\frac{\pi}{2} + \alpha$. Si ha, ancora:

$$\mathrm{HQ} = \mathrm{OK}$$

ossia:

$$\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\alpha$$

e,

$$\mathrm{OH} = -\,\mathrm{KP}$$

ossia:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\,\mathrm{sen}\alpha$$

e, per la definizione di funzione tangente (***13. 12. 3***, n. 3),

$$\text{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\frac{\cos\alpha}{sen\alpha}=-\frac{\cos\alpha}{sen\alpha}$$

da cui, essendo $k = \text{tg}\alpha$, $k' = \text{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$, abbiamo

$$k' = -\frac{1}{k}$$

Proprietà 7. Le rette r ed s, aventi coefficienti angolari k e k' rispettivamente, sono *perpendicolari* se e solo se $k' = -\frac{1}{k}$.

Esercizio 5. Data la retta

$$(r) \qquad y = 2x + 3$$

troviamo l'equazione della retta s perpendicolare alla retta r e passante per il punto P(1, 5).

Soluzione. La retta s ha, per la Proprietà 6, coefficiente angolare $k' = -\frac{1}{2}$, quindi

$$(s) \qquad y = -\frac{1}{2}x + h$$

Determiniamo h imponendo il passaggio di s per il punto P(1, 5). Si ha:

$$5 = -\frac{1}{2}1 + h$$

e $h = 5{,}5$. In definitiva:

$$(s) \qquad y = -\frac{1}{2}x + 5{,}5.$$

<u>Condizione di perpendicolarità di due rette in funzione dei numeri direttori</u>

Per la proprietà 4, la retta

$$(r) \qquad y = kx + p$$

ha numeri direttori (m, n) tali che $k = \frac{n}{m}$. Perciò, se una retta s, avente coefficiente angolare k' e numeri direttori (m', n'), è perpendicolare alla retta r, si avrà, per la Proprietà 7, $k' = \frac{n'}{m'} = -\frac{1}{k} = -\frac{m}{n}$, da cui: $mm' + nn' = 0$. Si ha dunque:

Proprietà 8. Se le rette r ed s hanno numeri direttori (m, n) ed (m', n'), rispettivamente, allora esse sono perpendicolari se e solo se $mm' + nn' = 0$.

Esempio 3. La retta r di equazioni parametriche

$$\begin{aligned} x &= 1 - 3t \\ y &= 2 + 4t, \end{aligned}$$

ha numeri direttori $(m, n) = (-3, 4)$ e la retta s di equazioni parametriche

$$\begin{aligned} x &= -5 + 4t \\ y &= 1 + 3t, \end{aligned}$$

ha numeri direttori $(m', n') = (4, 3)$. Esse sono perpendicolari perché

$$mm' + nn' = (-3)4 + 4(3) = 0.$$

Inoltre, se le rette r ed s hanno equazioni ordinarie

$$ax + by + c = 0 \text{ e } a'x + b'y + c' = 0,$$

rispettivamente, avremo, per la Proprietà 3:

Proprietà 9. Le rette r ed s aventi equazioni ordinarie $ax + by + c = 0$ e $a'x + b'y + c' = 0$, rispettivamente, sono perpendicolari se e solo se $aa' + bb' = 0$.

Esercizio 6. Data la retta r di equazioni parametriche

$$x = 4 - 2t$$
$$y = 1 + 3t$$

e il punto P(–1, 5), determinare le equazioni parametriche e l'equazione esplicita della retta s perpendicolare a r e passante per P.

Soluzione. Equazioni parametriche di una retta passante per il punto P(–1, 5) sono,

$$x = -1 + mt$$
$$y = 5 + nt;$$

la retta s, è perpendicolare a r se, per la Proprietà 8, accade: $-2m + 3n = 0$. L'uguaglianza è verificata se $m = 3$, $n = 2$. Allora le equazioni parametriche di s sono:

$$x = -1 + 3t$$
$$y = 5 + 2t;$$

Per trovare l'equazione esplicita di s eliminiamo il parametro t dalle equazioni parametriche:

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y-5}{2} = t$$

quindi: $3y - 15 - 2x - 2 = 0$, e $y = \frac{2}{3}x + \frac{17}{3}$.

13. 12. 6. Modulo di un vettore. Prodotto scalare e perpendicolarità di rette e vettori

Modulo di un vettore

Ricordiamo l'identificazione che abbiamo stabilito tra lo spazio vettoriale dei vettori geometrici V_α e lo spazio dei vettori numerici $\mathbf{R}^2$. In base all'identificazione parleremo genericamente di vettori e non distingueremo tra vettori geometrici e vettori numerici. Ricordiamo che il modulo di un vettore geometrico è definito in (**9. 2**) come il valore assoluto della lunghezza di un segmento orientato appartenente al vettore, ossia come lunghezza dell'ipotenusa del triangolo rettangolo i cui cateti sono le componenti del vettore (**9. 5**).

Se ci riferiamo genericamente ai vettori, possiamo definire il modulo $|\mathbf{a}|$ del vettore $\mathbf{a}$, di componenti (a_x, a_y), $\mathbf{a} = (a_x, a_y)$, nel modo seguente:

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

Prodotto scalare

Riprendiamo la nozione di prodotto scalare di due vettori (**8.3**) allo scopo di discutere più compiutamente il concetto di perpendicolarità tra vettori e tra rette.

Siano **a** e **b** vettori liberi del piano. Si definisce *angolo* di **a** e **b**, denotato **aˆb**, l'angolo di due rette orientate parallele ad **a** e **b** e aventi i versi di **a** e **b**, rispettivamente.

Definizione 1. Si definisce *prodotto scalare* dei vettori **a** e **b**, e si denota con uno dei simboli **a·b**, o **a×b**, il numero reale così definito:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0, \text{ se uno dei vettori è nullo,}$$

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\cos\mathbf{a}\hat{}\mathbf{b}, \text{ altrimenti}$$

(dove |**a**| e |**b**| denotano i moduli dei vettori **a** e **b**, rispettivamente). Valgono le proprietà:

1. $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$;
2. se **a** e **b** non sono nulli, allora $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0$, se e solo se $\cos\mathbf{a}\hat{}\mathbf{b} = 0$, ossia **a** e **b** sono perpendicolari;
3. quali che siano i vettori **a**, **b**, **c**, si ha $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{a}\cdot\mathbf{c}$
4. qualunque sia il numero reale h, $h(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) = h\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{a}\cdot h\mathbf{b}$

Se **x** e **y** sono i versori degli assi coordinati (**9.7**), allora

$$\mathbf{a}= a_x\mathbf{x}+a_y\mathbf{y}$$

$$\mathbf{b}= b_x\mathbf{x}+b_y\mathbf{y}$$

essendo (a_x, a_y), (b_x, b_y) le componenti di **a** e **b**. Per le proprietà 3 e 4, si ha

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = (a_x\mathbf{x}+a_y\mathbf{y}) + (b_x\mathbf{x}+b_y\mathbf{y}) = a_xb_x\mathbf{x}\cdot\mathbf{x} + a_xb_y\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} + a_yb_x\mathbf{y}\cdot\mathbf{x} + a_yb_y\mathbf{y}\cdot\mathbf{y} =$$

ed essendo

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{x} = \mathbf{y}\cdot\mathbf{y} = 1\cdot1\cos0 = 1$$

e, per l'ortogonalità di **x** e **y**,

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = \mathbf{y}\cdot\mathbf{x} = 0$$

si ha:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_xb_x+ a_yb_y \qquad \text{(A)}$$

Nota 1. Denotiamo i vettori geometrici di V_α mediante le coppie delle loro componenti, ossia mediante vettori numerici di $\mathbf{R}^2$, stante l'isomorfismo stabilito in (**9. 7**).

Esercizio 7. Calcoliamo il prodotto scalare dei vettori $\mathbf{a} = (2, -3)$, $\mathbf{b} = (-1, 5)$. Applichiamo la formula (A):

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 2(-1) + (-3)5 = -2 - 15 = -17$$

Esercizio 8. Calcoliamo il prodotto scalare dei vettori $\mathbf{a} = (2, 0)$, $\mathbf{b} = (-1, -1)$ e il coseno dell'angolo **aˆb**. Applichiamo la formula (A):

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = -2$$

In base alla definizione 1, siamo in grado di calcolare il coseno dell'angolo **aˆb**. Infatti, cominciamo col calcolare i moduli dei vettori **a** e **b**:

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{2^2+0^2} = 2, \quad |\mathbf{b}| = \sqrt{(-1)^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$$

Quindi

$$\cos \mathbf{a}\hat{}\mathbf{b} = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

L'esercizio 8 suggerisce un'utile osservazione. Dati i vettori $\mathbf{a} = (a_x, a_y)$, e $\mathbf{b} = (b_x, b_y)$, non nulli, otteniamo il coseno dell'angolo $\mathbf{a}\hat{}\mathbf{b}$ dalla formula

$$\cos \mathbf{a}\hat{}\mathbf{b} = \frac{a_x b_x + a_y b_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2}} \qquad \text{(B)}$$

che si ricava dalla definizione 1 e dall'uguaglianza (A). L'uguaglianza (B) esprime il coseno dell'angolo $\mathbf{a}\hat{}\mathbf{b}$ mediante le componenti dei vettori.

Inoltre, per la (B), i vettori **a**, **b** sono tra loro perpendicolari se e solo se

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y = 0$$

Esercizio 9. Dalla precedente uguaglianza ricaviamo che il generico vettore del piano perpendicolare al vettore $\mathbf{a} = (1, 1)$ è il vettore non nullo $\mathbf{b} = (b_x, b_y)$, tale che $1b_x + 1b_y = b_x + b_y = 0$. In altre parole, ogni vettore non nullo che ha componenti opposte è perpendicolare ad **a**. Ad esempio, i vettori (1, –1), (–1, 1), (2, –2), … sono perpendicolari ad **a**.

13. 12. 7. Perpendicolarità tra rette e vettori

Esprimeremo in questo n. le condizioni e proprietà della perpendicolarità tra rette e vettori a partire dal concetto di vettore. Ritroveremo, in particolare, i risultati esposti in (***13.12.5.***).

Le equazioni parametriche della retta r passante per i punti (distinti) $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ sono

$$x = x_1 + t(x_2 - x_1)$$
$$y = y_1 + t(y_2 - y_1)$$

con t parametro reale. I numeri $m = x_2 - x_1$ ed $n = y_2 - y_1$ sono i numeri direttori della retta r, cioè le componenti del vettore P_1P_2. Analogamente, sia s una retta di numeri direttori m', n'. Se le rette r ed s hanno lo stesso orientamento dei vettori allora, per la (B),

$$\cos r\hat{}s = \frac{mm' + nn'}{\sqrt{m^2 + n^2}\sqrt{m'^2 + n'^2}} \qquad \text{(C)}$$

Ne consegue che le rette r e s sono perpendicolari se e solo se

$$mm' + nn' = 0 \qquad \text{(D)}$$

Passiamo ora dalle equazioni parametriche

$$x = x_1 + tm$$
$$y = y_1 + tn$$

all'equazione ordinaria della retta r

$$(r) \qquad ax + by + c = 0$$

Ossia poniamo le equazioni parametriche nella forma ordinaria, eliminando il parametro t, come segue:

$$t = \frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n}$$

da cui

$$nx - nx_1 = my - my_1$$

e

$$nx - my - nx_1 + my_1 = 0$$

che è l'equazione ordinaria della retta r. I numeri direttori di r sono (m, n), ossia, nell'ordine, l'opposto del coefficiente di y e il coefficiente di x. Insomma, i numeri direttori di

$$(r) \qquad ax + by + c = 0$$

sono $(-b, a)$. Ad esempio, la retta

$$(r) \qquad -2x + 5y + 1 = 0$$

ha numeri direttori $(-5, -2)$.

Ogni coppia di punti distinti di r definisce un vettore le cui componenti sono proporzionali a (m, n) e sono pertanto numeri direttori di r.

Ne consegue, in particolare, che se $(-b, a)$ sono numeri direttori di r, lo sono anche $(b, -a)$. Infatti, $-1(-b, a) = (b, -a)$.

Consideriamo ore le due rette

$$(r) \qquad ax + by + c = 0$$
$$(s) \qquad a'x + b'y + c' = 0$$

che hanno numeri direttori $(-b, a)$ e $(-b', a')$, rispettivamente. Le due rette sono perpendicolari se e solo se $\cos r\hat{}s = 0$, ossia , per la (C), se e solo se

$$aa' + bb' = 0 \qquad \text{(E)}$$

Esercizio 10. Trovare l'equazione ordinaria della retta s passante per il punto P(–4, 6) e perpendicolare alla retta

$$(r) \qquad 3x + 5y + 2 = 0$$

Soluzione. Per la condizione (E), i coefficienti a' e b' dell'equazione di s sono tali che

$$3a' + 5b' = 0$$

Sarà dunque $a' = 5$ e $b' = -3$ e l'equazione di s è del tipo

$$5x - 3y + c = 0$$

con c da determinare imponendo il passaggio di s per il punto assegnato P(–4, 6):

$$5(-4) -3(6) + c = 0$$

donde $c = 38$ e

$$(s) \qquad 5x - 3y + 38 = 0.$$

Proprietà 10. Sia r la retta di equazione:

$$(r) \qquad ax + by + c = 0$$

La retta r passa per $P(x_0, y_0)$ se e solo se

$$ax_0 + by_0 + c = 0$$

Dalle due ultime uguaglianze, sottraendo,

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$$

otteniamo l'equazione che rappresenta la generica retta passante per $P(x_0, y_0)$.

Esercizio 11. Dati i punti P(4, –2) , Q(3, 5) , R(–6, 1) determinare la retta s passante per il punto R e perpendicolare al vettore PQ.

(*Soluzione* 1). Per la Proprietà 9, la generica retta s_R , passante per R, ha equazione

$$(s_R) \quad a(x + 6) + b(y - 1) = 0$$

Questa è perpendicolare al vettore PQ, che ha componenti (3–4, 5+2) = (–1, 7), (che sono numeri direttori della retta r passante per PQ), se e solo se i numeri direttori (m, n) di r e i numeri direttori $(m', n') = (-b, a)$ di s verificano la condizione (D)

$$mm' + nn' = -1(-b) + 7a = b + 7a = 0$$
da cui $b = 7$, $a = -1$ e la retta s ha equazione
$$(s) \quad -(x + 6) + 7(y - 1) = 0$$
che scriviamo
$$(s) \quad -x + 7y - 13 = 0$$
(*Soluzione* 2). Le equazioni parametriche della retta s passante per R(–6, 1) sono
$$x = -6 + tm', \ y = 1 + tn'$$
e le componenti del vettore PQ sono (–1, 7). Per la (D), allora: $-m' + 7n' = 0$, da cui: $m' = 7$ e $n' = 1$ e le equazioni di s sono:
$$x = -6 + 7t, \ y = 1 + t$$
(che, volendo, danno luogo alla forma ordinaria $(s) \quad -x + 7y - 13 = 0$).

13. 12. 8. Esercizi

[1]. Dato il punto A(2, –5), determinare le rette seguenti:

a) la parallela all'asse x
b) la parallela all'asse y
c) la parallela alla retta $(s)\ 4x + 3y - 1 = 0$
d) la perpendicolare alla retta passante per P(1, 1) e Q(2, –1)
e) la retta passante per il punto comune alle rette
$$(p) \qquad 5x - 3y + 8 = 0$$
$$(r) \qquad x - y = 0$$

Soluzioni

a) Ogni retta parallela all'asse x ha un'equazione della forma (***7. 2. 7***)
$y = h$. Se la retta passa per un punto di ordinata –5, ogni punto della retta ha ordinata –5, perciò l'equazione della retta richiesta è $y = -5$.

b) Analogamente, la parallela all'asse y passante per A ha equazione $x = 2$.

c) Due rette parallele hanno, per la Proposizione 1, le coppie di numeri direttori uguali, o proporzionali. I numeri direttori di s sono $(m, n) = (-3, 4)$, perciò ogni parallela a s ha equazione della forma $(s')\ 4x + 3y + k = 0$, col parametro k da determinare imponendo il passaggio di s' per A(2, –5):
$$4(2)+3(-5) + k = 0, \ k = 7$$
quindi
$$(s)\ 4x + 3y + 7 = 0$$

d) I numeri direttori della retta PQ sono $m = 2-1=1$, $n = -1-1= -2$. Numeri direttori della perpendicolare sono: $m' =2$, $n' =1$. Allora le equazioni parametriche della retta per A perpendicolare alla retta PQ sono:
$$x = 2 + 2t$$
$$y = -5 + t$$

e) Il punto comune alle rette p e r ha coordinate (x, y) tali che
$$x = y \ \text{ e } \ 5x - 3x + 8 = 0$$
da cui $(x, y) = (-1, -1)$.

[2]. Dati i punti A(–1, 2), B(–4, 3),

a) determinare i numeri direttori della retta r passante per A e B;

b) scrivere le equazioni parametriche della retta r;

c) scrivere le equazioni parametriche della retta s, passante per il punto C(4, –3) e parallela alla retta r;

d) scrivere l'equazione esplicita della retta u passante per D(7, –1) e perpendicolare alla retta AB.

Soluzioni
a) I numeri direttori della retta r sono le componenti di un vettore parallelo alla retta r; ad esempio, sono le componenti del vettore AB, $(-4-(-1), 3-2) = (-3, 1)$.
b) Sono equazioni parametriche della retta AB le seguenti:

$$x = -1 - 3t$$
$$y = 2 + t$$

c) Le equazioni di s sono

$$x = 4 - 3t, \quad y = -3 + t$$

d) Per la Proprietà 9, l'equazione della retta u è del tipo: $y - (-1) = k(x-7)$. I numeri direttori di u sono (m, n) tali che, per la (D), $-3m + 1n = 0$, ossia $m = 1$, $n = 3$, e il coefficiente angolare di u vale, per la Proprietà 4, $k = \frac{n}{m} = 3$. In conclusione, l'equazione esplicita di u è $y = 3x-22$.

[3]. Data la circonferenza di centro C(1, 2) e raggio $h = 2$, determinare i punti che la circonferenza ha in comune con gli assi coordinati e con la retta r parallela all'asse x e passante per il punto $(0, -1)$.
Soluzione. L'equazione della circonferenza (***31.12.1***) è $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$, e può porsi, sviluppando i quadrati, nella forma

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0.$$

L'intersezione della circonferenza con l'asse x si trova risolvendo il sistema delle due equazioni

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$$
$$y = 0$$

Per sostituzione nella prima equazione, abbiamo: $x^2 - 2x + 1 = 0$, che ha come radice $x = 1$. Dunque la circonferenza ha in comune con l'asse x il solo punto (1, 0). L' asse x è una *retta tangente* alla circonferenza.
L'intersezione della circonferenza con l'asse y si trova risolvendo il sistema delle due equazioni

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$$
$$x = 0$$

Per sostituzione nella prima equazione, abbiamo: $y^2 - 4y + 1 = 0$, che ha le due radici: $y = 2 \pm \sqrt{3}$. Dunque la circonferenza ha in comune con l'asse y i due punti $(0, 2-\sqrt{3})$ e $(0, 2+\sqrt{3})$. L' asse y è una *retta secante* la circonferenza.
La retta r parallela all'asse x e passante per il punto $(0, -1)$ ha equazione $y = -1$. Allora l'intersezione della circonferenza con la retta r si trova risolvendo il sistema delle due equazioni

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$$
$$y = -1$$

Per sostituzione nella prima equazione, abbiamo: $x^2 + 1 - 2x + 4 + 1 = 0$, che si riduce alla forma: $x^2 - 2x + 6 = 0$, il cui discriminante (**13.7**) vale $4 - 24 = -20 < 0$ e l'equazione ha le radici immaginarie. Dunque la circonferenza non ha punti in comune con la retta r. La *retta r* è *esterna* alla circonferenza.

[4]. Determinare l'equazione della circonferenza avente centro C(3, 2) e passante per il punto P(4, 4).
Soluzione. Il raggio della circonferenza è la lunghezza

$$|\mathrm{CP}| = \sqrt{(4-3)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{5}$$

e l'equazione della circonferenza è $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 5$.

[5]. L'equazione della circonferenza di centro C(a, b) e raggio h, ha la forma

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = h^2$$

Sviluppiamo i quadrati, per ottenere: $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - h^2 = 0$. Quindi, posto $-2a = m$, $-2b = n$, $a^2 + b^2 - h^2 = p$, l'equazione della circonferenza assume la forma

$$x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0 \qquad (*)$$

Vogliamo ora determinare l'equazione della circonferenza passante per i tre punti (***7.2.4***) : A(1, 0), O(0, 0), B(0, 1). Evidentemente i punti non sono allineati. Imponiamo il passaggio della circonferenza per ciascuno dei tre punti. Il passaggio della circonferenza per A, O, B implica nella (*), rispettivamente:

$$m + p = -1$$
$$p = 0$$
$$n + p = -1$$

Questo sistema di equazioni ha la soluzione (m, n, p) = (–1, 0, –1). I valori vanno sostituiti in (*): $x^2 + y^2 - x - y = 0$, che è l'equazione della circonferenza richiesta.